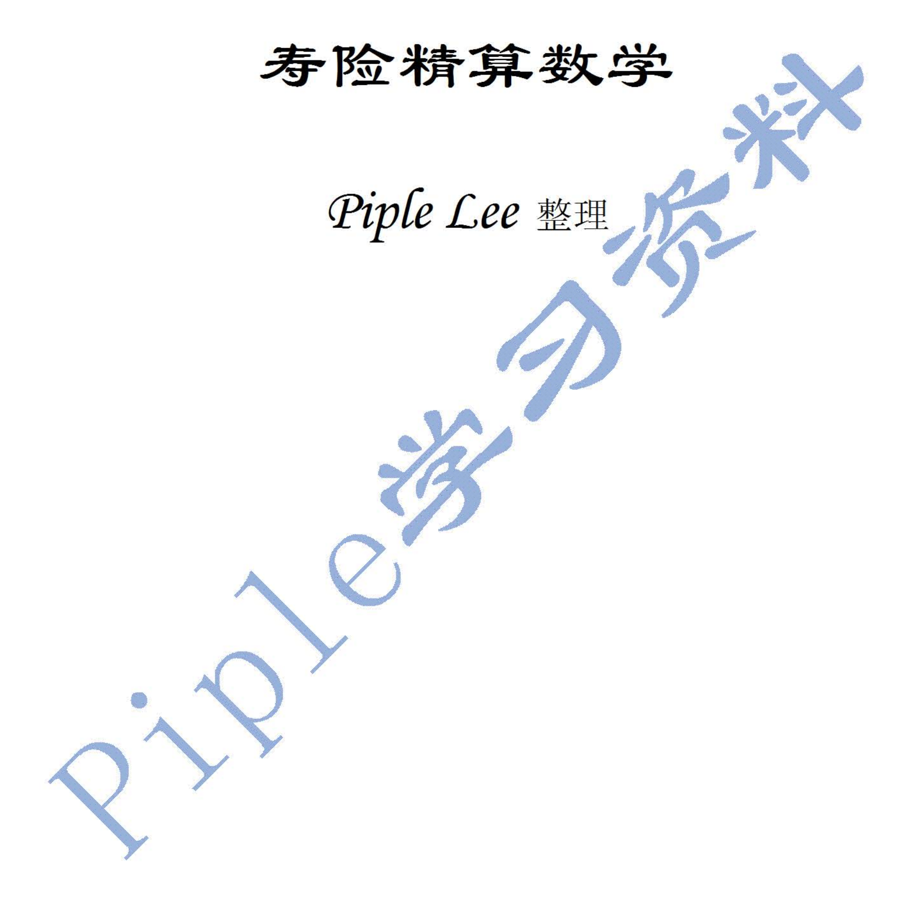
寿险精算数学

Piple Lee 整理



二〇〇六年六月～二〇〇六年九月

第一章 生存分布与生命表

1. 设连续型未来寿命随机变量为 $T(x)=X-x$，则其分布函数为

   ${}_{t|u}q_x={}_tp_x-{}_{t+u}p_x={}_{t+u}q_x-{}_tq_x={}_tp_x\cdot{}_uq_{x+t}$。

2. 设离散型未来寿命的周年数随机变量 $K(x)=[T(x)]$，则其分布函数为

   ${}_{k|}q_x={}_kp_x-{}_{k+1}p_x={}_{k+1}q_x-{}_kq_x={}_kp_x\cdot q_{x+k}$。

3. 死力 μ_x 的性质

   (1)当 $x\geqslant0$ 时，$\mu_x\geqslant0$；

   (2)对于任意 $x\geqslant0$，都有 $\int_x^{+\infty}\mu_s ds=+\infty$；

   (3) $\int_0^{+\infty}{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}dt=1$ 。

4. 死力 μ_x 与随机变量 $T(x)$的分布函数、密度函数、生存函数之间的关系式

	${}_tq_x$	$f_T(t)$	${}_tp_x$	μ_x
分布函数 ${}_tq_x$		$\int_0^x f(t)dt$	$1-S(x)$	$1-\exp(-\int_0^x\mu_s ds)$
密度函数 $f_T(t)$	$F'(x)$		$-S'(x)$	$\exp(-\int_0^x\mu_s ds)\cdot\mu_x$
生存函数 ${}_tp_x$	$1-F(x)$	$1-\int_0^x f(t)dt$		$\exp(-\int_0^x\mu_s ds)$
死力 μ_x	$\frac{F'(x)}{1-F(x)}$	$\frac{f(x)}{\int_x^\infty f(t)dt}$	$\frac{-S'(x)}{S(x)}$	

5. 死力的解析形式

解析形式	μ_x	$S(x)$
De Moivre 形式	$\frac{1}{\omega-x}\ (0\leqslant x<\omega)$	$1-\frac{x}{\omega}$
Gompertz 形式	$B\cdot c^x\ (B>0,c>1)\ (x\geqslant0)$	$\exp[\frac{B}{\ln c}(1-c^x)]$
Makeham 形式	$A+B\cdot c^x\ (B>0,c>1,A>-B)\ (x\geqslant0)$	$\exp[\frac{B}{\ln c}(1-c^x)-Ax]$

Weibull 形式	$k\cdot x^n$ ($k>0,n>0$) ($x\geqslant 0$)	$\exp(-\frac{kx^{n+1}}{n+1})$

6. 生命表函数

生存人数 $l_x=l_0\cdot S(x)$

死亡人数 $d_x=l_x-l_{x+1}$

$_nd_x=l_x-l_{x+n}$

生存人年数 $L_x=\int_0^1 l_{x+t}dt$

累积生存人年数 $T_x=\sum_x^{\infty}L_x=\int_0^{+\infty}l_{x+t}dt$

平均余命 $\mathring{e}_x=\frac{T_x}{l_x}=E[T(x)]=\int_0^{+\infty}t\cdot{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}dt=\int_0^{+\infty}{}_tp_xdt=\frac{1}{l_x}\int_0^{+\infty}l_{x+t}dt$

$\mathring{e}_0=\frac{T_0}{l_0}$

平均生存函数 $\alpha(x)=\frac{\int_0^1 t\cdot l_{x+t}\mu_{x+t}dt}{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt}=\frac{L_x-l_{x+1}}{l_x-l_{x+1}}$，于是 $L_x=\alpha(x)l_x+[1-\alpha(x)]l_{x+1}$

简约平均余命 $e_x=E[K(x)]=\sum_{k\geq 0}k\cdot{}_{k|}q_x=\sum_{k\geq 0}k\cdot({}_kp_x-{}_{k+1}p_x)$

7. 生命表函数之间的关系

$p_x=\frac{S(x+1)}{S(x)}=\frac{l_{x+1}}{l_x}$　　　$q_x=1-\frac{S(x+1)}{S(x)}=1-\frac{l_{x+1}}{l_x}=\frac{d_x}{l_x}$

${}_tp_x=\frac{S(x+t)}{S(x)}=\frac{l_{x+t}}{l_x}$　　　${}_tq_x=1-\frac{S(x+t)}{S(x)}=1-\frac{l_{x+t}}{l_x}=\frac{{}_td_x}{l_x}$

$e_x=\frac{\sum_{x+1}^{\infty}l_x}{l_x}$

$l_x=l_0\cdot\exp(-\int_0^x\mu_sds)$

${}_td_x=l_x-l_{x+t}=\int_x^{x+t}\mu_sds$

8. $D[T(x)]=2\int_0^{\infty}t\cdot{}_tp_xdt-\mathring{e}_x^{\,2}$　　$D[K(x)]=2(\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot{}_{k+1}p_x)-e_x^{\,2}$

9. 尾龄的分布假设($0\leqslant t\leqslant 1$)

生命表函数	死亡均匀分布(UDD)假设	常值死力(CFM)假设	Balducci 假设
$S(x+t)$	$(1-t)\cdot S(x)+t\cdot S(x+1)$	$S(x+t)=S(x)e^{-\mu_xt}$	$[(1-t)\cdot\frac{1}{S(x)}+t\cdot\frac{1}{S(x+1)}]^{-1}$
l_{x+t}	$l_x-t\cdot d_x$	$l_{x+t}=l_xe^{-\mu_xt}$	$[(1-t)\cdot\frac{1}{l_x}+t\cdot\frac{1}{l_{x+1}}]^{-1}$
${}_tp_x$	$1-t\cdot q_x$	$e^{-\mu_xt}$	$\frac{p_x}{p_x+t(1-p_x)}=\frac{1-q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_tq_x$	$t\cdot q_x$	$1-e^{-\mu_xt}$	$\frac{t\cdot q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_sq_{x+t}$	$\frac{s\cdot q_x}{1-t\cdot q_x}$	$1-e^{-\mu_xs}$	$\frac{s\cdot q_x}{1-(1-t-s)q_x}$
μ_{x+t}	$\frac{q_x}{1-t\cdot q_x}$	$\mu_x=-\ln p_x$	$\frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_tp_x\cdot\mu_{x+t}$	q_x	$\mu_xe^{-\mu_xt}$	$\frac{q_x(1-q_x)}{[1-(1-t)q_x]^2}$
$\mathring{e}_x$	$e_x+\frac{1}{2}$		

10. 选择-终极生命表

选择生命表

选择期

终极生命表

Piple学习资料

第二章 趸缴纯保费

1. 离散型人寿保险模型与连续型人寿保险模型的**趸缴纯保费**

单位保额趸缴纯保费 $Z=v^T$	离散型人寿保险模型	连续型人寿保险模型
换算函数	$C_x=v^{x+1}d_x$　$D_x=v^x l_x$ $M_x=\sum_{k=0}^{\infty}C_{x+k}$　$N_x=\sum_{k=0}^{\infty}D_{x+k}$ $R_x=\sum_{k=0}^{\infty}M_{x+k}$　$S_x=\sum_{k=0}^{\infty}N_{x+k}$	$\bar{C}_x=\int_0^1 D_{x+t}\mu_{x+t}dt$ $\bar{M}_x=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{C}_{x+k}=\int_0^{\infty}D_{x+t}\mu_{x+t}dt$ $\bar{R}_x=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{M}_{x+k}$
利力与折现系数		$\delta=-\ln v$　$v=e^{-\delta}$
终身寿险	$A_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_{k\vert}q_x=\frac{M_x}{D_x}$ 递推方程式 $A_x=vq_x+vp_x\cdot A_{x+1}$ $(1+i)l_xA_x=l_xA_{x+1}+d_x(1-A_{x+1})$ $A_{x+1}-A_x=iA_x-q_x(1-A_{x+1})$	$\bar{A}_x=\int_0^{+\infty}v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt=\frac{\bar{M}_x}{D_x}$ 微分方程式 $\frac{d}{dx}(\bar{A}_x)=\delta\bar{A}_x-\mu_x(1-\bar{A}_x)$
		${}^2\bar{A}_x=\int_0^{+\infty}v^{2t}\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$
		$D(Z)={}^2\bar{A}_x-(\bar{A}_x)^2$

延期 h 年的终身寿险	${}_{h\vert}A_x=\sum_{k=h}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_{k\vert}q_x=A_x-A^1_{x:\overline{h\vert}}=A_{x:\overline{h\vert}}^{\ \ 1}\cdot A_{x+h}=\frac{M_{x+h}}{D_x}$	${}_{h\vert}\bar{A}_x=\int_h^{+\infty}v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt=\frac{\bar{M}_{x+h}}{D_x}$
		${}_{h\vert}^{2}\bar{A}_x=\int_h^{+\infty}v^{2t}\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$
n 年定期死亡保险	$A^1_{x:\overline{n\vert}}=\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}\cdot{}_{k\vert}q_x=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}$	$\bar{A}^1_{x:\overline{n\vert}}=\int_0^n v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt=\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+n}}{D_x}$
	${}^2A^1_{x:\overline{n\vert}}=\sum_{k=0}^{n-1}v^{2(k+1)}\cdot{}_{k\vert}q_x$	${}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n\vert}}=\int_0^n v^{2t}\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$
	$D(Z)={}^2A^1_{x:\overline{n\vert}}-(A^1_{x:\overline{n\vert}})^2$	$D(Z)={}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n\vert}}-(\bar{A}^1_{x:\overline{n\vert}})^2$
1 年定期死亡保险	$c_x=A^1_{x:\overline{1\vert}}=\frac{C_x}{D_x}$	
n 年定期生存保险	$A_{x:\overline{n\vert}}^{\ \ 1}=v^n\cdot{}_np_x=\frac{D_{x+n}}{D_x}$	
n 年定期两全保险 (死亡保险＋生存保险)	$A_{x:\overline{n\vert}}=A^1_{x:\overline{n\vert}}+A_{x:\overline{n\vert}}^{\ \ 1}=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_x}$	$\bar{A}_{x:\overline{n\vert}}=\bar{A}^1_{x:\overline{n\vert}}+A_{x:\overline{n\vert}}^{\ \ 1}=\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_x}$
		${}^2\bar{A}_{x:\overline{n\vert}}={}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n\vert}}+v^{2n}\cdot{}_np_x$
延期 h 年的 n 年定期死亡保险	${}_{h\vert}A^1_{x:\overline{n\vert}}={}_{h\vert n}A_x=\sum_{k=h}^{h+n-1}v^{k+1}\cdot{}_{k\vert}q_x$	${}_{h\vert}\bar{A}^1_{x:\overline{n\vert}}={}_{h\vert n}\bar{A}_x=\int_h^{h+n}v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$

	$=A^1_{x:\overline{h+n}\rvert}-A^1_{x:\overline{h}\rvert}=A_{x:\overline{h}\rvert}^{\ \ 1}\cdot A^1_{x+h:\overline{n}\rvert}=\dfrac{M_{x+h}-M_{x+h+n}}{D_x}$	$=\dfrac{\overline{M}_{x+h}-\overline{M}_{x+h+n}}{D_x}$
延期 h 年的 n 年定期生存保险	${}_{h\rvert}A_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1}=v^{h+n}\cdot{}_{h+n}p_x$	
延期 h 年的 n 年定期两全保险	${}_{h\rvert}A_{x:\overline{n}\rvert}={}_{h\rvert}A^1_{x:\overline{n}\rvert}+{}_{h\rvert}A_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1}=A_{x:\overline{h}\rvert}^{\ \ 1}\cdot A_{x+h:\overline{n}\rvert}$	${}_{h\rvert}\overline{A}_{x:\overline{n}\rvert}={}_{h\rvert}\overline{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}+{}_{h\rvert}A_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1}=\dfrac{\overline{M}_{x+h}-\overline{M}_{x+h+n}+D_{x+h+n}}{D_x}$
递增保额的终身寿险	$(IA)_x=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\cdot{}_{k\rvert}q_x=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{k\rvert}A_x=\dfrac{R_x}{D_x}$	$(I\overline{A})_x=\int_0^{+\infty}[t+1]v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$ $=\sum_{k=1}^{\infty}k\int_{k-1}^{k}v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt=\dfrac{\overline{R}_x}{D_x}$
每年递增 m 次的递增保额终身寿险		$(I^{(m)}\overline{A})_x=\int_0^{+\infty}\dfrac{[mt+1]}{m}v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$
连续递增的递增保额终身寿险		$(\overline{I}\overline{A})_x=\int_0^{+\infty}tv^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$ $=\int_0^{+\infty}(\int_s^{+\infty}v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt)ds=\int_0^{+\infty}{}_{s\rvert}\overline{A}_xds$
递增保额的 n 年定期死亡保险	$(IA)^1_{x:\overline{n}\rvert}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\cdot{}_{k\rvert}q_x=\dfrac{R_x-R_{x+n}-nM_{x+n}}{D_x}$ $=\dfrac{R_x-(n+1)R_{x+n}+nR_{x+n+1}}{D_x}$	$(I\overline{A})^1_{x:\overline{n}\rvert}=\int_0^n[t+1]v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$ $=\sum_{k=1}^{n}k\int_{k-1}^{k}v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$

		$=\dfrac{\overline{R}_x-\overline{R}_{x+n}-n\overline{M}_{x+n}}{D_x}$
递减保额的 n 年定期死亡保险	$(DA)^1_{x:\overline{n}\rvert}=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\cdot{}_{k\rvert}q_x$ $=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k){}_{k\rvert}A^1_{x:\overline{1}\rvert}=\sum_{k=0}^{n-1}A^1_{x:\overline{n-k}\rvert}=\sum_{k=1}^{n}A^1_{x:\overline{k}\rvert}$ $=\dfrac{nM_x-(R_{x+1}-R_{x+n+1})}{D_x}$	$(D\overline{A})^1_{x:\overline{n}\rvert}=\int_0^n(n-[t])v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$ $=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\int_k^{k+1}v^t\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$ $=\dfrac{n\overline{M}_x-(\overline{R}_{x+1}-\overline{R}_{x+n+1})}{D_x}$

Piple学习资料

2. 在死亡均匀分布假设下，$\bar{A}_x$ 与 A_x之间的关系

$$\bar{A}_x=\frac{i}{\delta}\cdot A_x \qquad (I\bar{A})_x=\frac{i}{\delta}\cdot(IA)_x$$

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}\cdot A^1_{x:\overline{n}|} \qquad (I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}\cdot(IA)^1_{x:\overline{n}|}$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}\cdot A^1_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \qquad (I\bar{A})_x=\frac{i}{\delta}\cdot[(IA)_x-(\frac{1}{d}-\frac{1}{\delta})A_x]$$

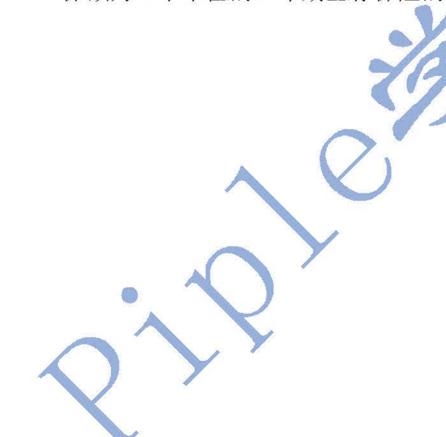
$${}_{h|}\bar{A}_x=\frac{i}{\delta}\cdot{}_{h|}A_x \qquad (D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}\cdot(DA)^1_{x:\overline{n}|}$$

$${}_{h|n}\bar{A}_x=\frac{i}{\delta}\cdot{}_{h|n}A_x$$

$${}_{h|}\bar{A}_{x:\overline{n}|}=\frac{i}{\delta}\cdot{}_{h|}A^1_{x:\overline{n}|}+{}_{h|}A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$$

3. **生存年金**的计算方法：现时支付法，总额支付法。

保额为 1 个单位的 n 年期生存保险的精算现值(生存年金)表示为 ${}_nE_x=v^n\cdot{}_np_x$。



生存年金	离散型生存年金		连续型生存年金 $\bar{a}_{\overline{T\|}}$
	期初付生存年金 $\ddot{a}_{\overline{T\|}}$	期末付生存年金 $a_{\overline{T\|}}$	
换算函数			$\bar{N}_x = \int_0^{+\infty} D_{x+t}dt$ 在死亡均匀分布假设条件下 $\bar{N}_x = \frac{id}{\delta^2}N_x + \frac{\delta - i}{\delta^2}D_x$
终身生存年金	$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1\|}} \cdot {}_{k\|}q_x$ $= \frac{N_x}{D_x} = \frac{1}{d}(1 - A_x)$ $1 = d\ddot{a}_x + A_x$ 递推方程式 $\ddot{a}_x = 1 + {}_1E_x \ddot{a}_{x+1}$	$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} = \ddot{a}_x - 1 = v\ddot{a}_x - A_x$ $= \frac{1}{i}[1 - (1+i)A_x]$ $1 = ia_x + (1+i)A_x$	$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} v^t \cdot {}_tp_x dt = \int_0^{+\infty} \bar{a}_{\overline{t\|}}\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt$ $= \frac{\bar{N}_x}{D_x} = \frac{1}{\delta}(1 - \bar{A}_x)$ $1 = \delta\bar{a}_x + \bar{A}_x$
	$D(a_{\overline{K\|}}) = \frac{1}{d^2}[{}^2A_x - (A_x)^2]$		$D(\bar{a}_{\overline{T\|}}) = \frac{1}{\delta^2}[{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2]$
延期 h 年的 终身生存年金	${}_{h\|}\ddot{a}_x = \sum_{k=h}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x = \frac{N_{x+h}}{D_x}$ $= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{h\|}} = {}_hE_x \cdot \ddot{a}_{x+h}$	${}_{h\|}a_x = \sum_{k=h+1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x$ $= a_x - a_{x:\overline{h\|}} = {}_{h\|}a_x - v^h \cdot {}_hp_x$	${}_{h\|}\bar{a}_x = \int_h^{\infty} v^t \cdot {}_tp_x dt = \frac{\bar{N}_{x+h}}{D_x}$ $= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{h\|}} = {}_hE_x \cdot \bar{a}_{x+h} = \frac{1}{\delta}(\bar{A}_{x:\overline{h\|}} - \bar{A}_x)$

	递推方程式 ${}_{h\|}\ddot{a}_x = {}_1E_x\, {}_{h\|}\ddot{a}_{x+1} + v^h \cdot {}_hp_x$		
			$D(\bar{a}_{\overline{T\|}}) = \frac{2}{\delta} v^{2h}\, {}_hp_x(\bar{a}_{x+h} - {}^2\bar{a}_{x+h}) - ({}_{h\|}\bar{a}_x)^2$
n 年定期生存年金	$\ddot{a}_{x:\overline{n\|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$ $= \frac{1}{d}(1 - A_{x:\overline{n\|}})$ $1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n\|}} + A_{x:\overline{n\|}}$ 递推方程式 $\ddot{a}_{x:\overline{n\|}} = 1 + {}_1E_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n\|}} - v^n \cdot {}_np_x$	$a_{x:\overline{n\|}} = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_kp_x$ $= \ddot{a}_{x:\overline{n\|}} - 1 + {}_nE_x = v\ddot{a}_{x:\overline{n\|}} - A^1_{x:\overline{n\|}}$ $1 = i\ddot{a}_{x:\overline{n\|}} + iA^1_{x:\overline{n\|}} + A_{x:\overline{n\|}}$	$\bar{a}_{x:\overline{n\|}} = \int_0^n v^t \cdot {}_tp_x dt = \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x}$ $= \frac{1}{\delta}(1 - \bar{A}_{x:\overline{n\|}})$ $1 = \delta\bar{a}_{x:\overline{n\|}} + \bar{A}_{x:\overline{n\|}}$ 微分方程式 $\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}_{x:\overline{n\|}}) = (\mu_x + \delta)\bar{a}_{x:\overline{n\|}} - (1 - {}_nE_x)$
			$D(\bar{a}_{\overline{T\|}}) = \frac{1}{\delta^2}[{}^2\bar{A}_{x:\overline{n\|}} - (\bar{A}_{x:\overline{n\|}})^2]$ $= \frac{2}{\delta}(\bar{a}_{x:\overline{n\|}} - {}^2\bar{a}_{x:\overline{n\|}}) - (\bar{a}_{x:\overline{n\|}})^2$
	$\ddot{s}_{x:\overline{n\|}} = \frac{1}{{}_nE_x}\ddot{a}_{x:\overline{n\|}}$	$s_{x:\overline{n\|}} = \frac{1}{{}_nE_x}a_{x:\overline{n\|}}$	$\bar{s}_{x:\overline{n\|}} = \frac{1}{{}_nE_x}\bar{a}_{x:\overline{n\|}}$
延期 h 年的 n 年定期生存年金	${}_{h\|n}\ddot{a}_x = \sum_{k=h}^{h+n-1} v^k \cdot {}_kp_x = \frac{N_{x+h} - N_{x+h+n}}{D_x}$		${}_{h\|n}\bar{a}_x = \int_h^{h+n} v^t \cdot {}_tp_x dt = \frac{\bar{N}_{x+h} - \bar{N}_{x+h+n}}{D_x}$

	$=\ddot{a}_{x:\overline{h+n}\vert}-\ddot{a}_{x:\overline{h}\vert}={}_{h}E_{x}\cdot\ddot{a}_{x+h:\overline{n}\vert}$		$=\bar{a}_{x:\overline{h+n}\vert}-\bar{a}_{x:\overline{h}\vert}={}_{h\vert}\bar{a}_{x}-{}_{h+n\vert}\bar{a}_{x}$ $={}_{h}E_{x}\cdot\bar{a}_{x+h:\overline{n}\vert}=\frac{1}{\delta}(\bar{A}_{x:\overline{h}\vert}-\bar{A}_{x:\overline{h+n}\vert})$
递增保额的 终身生存年金	$(I\ddot{a})_{x}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k}\cdot{}_{k}p_{x}=\frac{S_{x}}{D_{x}}$	$(Ia)_{x}=\frac{S_{x+1}}{D_{x}}$	
递增保额的 n 年定期生存年金	$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}\vert}=\frac{S_{x}-S_{x+n}-nN_{x+n}}{D_{x}}$		
递减保额的 n 年定期生存年金		$(Da)_{x:\overline{n}\vert}=\frac{nN_{x+1}-(S_{x+2}-S_{x+n+2})}{D_{x}}$	
每年付 m 次	令 $\alpha(m)=\frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}$， $\beta(m)=\frac{i^{(m)}-i}{i^{(m)}d^{(m)}}$		
每年付 m 次的 终身生存年金	$\ddot{a}_{x}^{(m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}v^{k/m}\cdot{}_{k/m}p_{x}$ $=\frac{1}{d^{(m)}}(1-A_{x}^{(m)})$ $1=d^{(m)}\ddot{a}_{x}^{(m)}+A_{x}^{(m)}$ 尾龄服从死亡均匀分布假设下 $\ddot{a}_{x}^{(m)}=\alpha(m)\ddot{a}_{x}+\beta(m)\approx\ddot{a}_{x}-\frac{m-1}{2m}$	$a_{x}^{(m)}=\ddot{a}_{x}^{(m)}-\frac{1}{m}$ $\approx\ddot{a}_{x}-\frac{m+1}{2m}$	

	递推方程式 $\ddot{a}_{x}^{(m)}=\ddot{a}_{x:\overline{1}\vert}^{(m)}+{}_{1}E_{x}\ddot{a}_{x+1}^{(m)}$		
延期 h 年 每年付 m 次的 终身生存年金	${}_{h\vert}\ddot{a}_{x}^{(m)}=\ddot{a}_{x}^{(m)}-\ddot{a}_{x:\overline{h}\vert}^{(m)}={}_{h}E_{x}\cdot\ddot{a}_{x+h}^{(m)}$ 尾龄服从死亡均匀分布假设下 ${}_{h\vert}\ddot{a}_{x}^{(m)}=\alpha(m){}_{h\vert}\ddot{a}_{x}+\beta(m){}_{h}E_{x}$ $\approx{}_{h\vert}\ddot{a}_{x}-\frac{m-1}{2m}{}_{h}E_{x}$	${}_{h\vert}a_{x}^{(m)}=a_{x}^{(m)}-a_{x:\overline{h}\vert}^{(m)}={}_{h\vert}\ddot{a}_{x}^{(m)}-\frac{1}{m}{}_{h}E_{x}$	
每年付 m 次的 n 年定期生存年金	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}=\ddot{a}_{x}^{(m)}-{}_{n\vert}\ddot{a}_{x}^{(m)}=\ddot{a}_{x}^{(m)}-{}_{n}E_{x}\cdot\ddot{a}_{x+n}^{(m)}$ 尾龄服从死亡均匀分布假设下 $\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}=\alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}+\beta(m)(1-{}_{n}E_{x})$ $\approx\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}-\frac{m-1}{2m}(1-{}_{n}E_{x})$	$a_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}=\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}^{(m)}-\frac{1}{m}(1-{}_{n}E_{x})$	
每年付 m 次的 递变保额的 n 年定期生存年金	$(apv)_{x}=\sum_{k=0}^{n-1}b_{x+k}\ddot{a}_{x+k:\overline{1}\vert}^{(m)}\cdot{}_{k}E_{x}$ 递推方程式 $(apv)_{x}=b_{x}\ddot{a}_{x:\overline{1}\vert}^{(m)}+{}_{1}E_{x}(apv)_{x+1}$		

4. **完全期末年金与比例期初年金**

每年付 m 次	完全期末年金	相互间关系	比例期初年金
终身 生存年金	$\mathring{a}_x^{(m)}=\frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_x$ $1=i^{(m)}\mathring{a}_x^{(m)}+\bar{A}_x$ $\mathring{a}_x^{(1)}=\mathring{a}_x=\frac{\delta}{i}\bar{a}_x$	$a_x^{(m)}<\mathring{a}_x^{(m)}<\bar{a}_x<\ddot{a}_x^{\{m\}}<\ddot{a}_x^{(m)}$ $\ddot{a}_x^{\{m\}}=(1+i)^{\frac{1}{m}}\mathring{a}_x^{(m)}$	$\ddot{a}_x^{\{m\}}=\frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_x$ $1=d^{(m)}\ddot{a}_x^{\{m\}}+\bar{A}_x$ $\ddot{a}_x^{\{1\}}=\frac{\delta}{d}\bar{a}_x$
延期 h 年的终身 生存年金	${}_{h\|}\mathring{a}_x^{(m)}=\frac{\delta}{i^{(m)}}{}_{h\|}\bar{a}_x$ ${}_{h\|}\mathring{a}_x^{(1)}={}_{h\|}\mathring{a}_x=\frac{\delta}{i}{}_{h\|}\bar{a}_x$	${}_{h\|}\ddot{a}_x^{\{m\}}=(1+i)^{\frac{1}{m}}{}_{h\|}\mathring{a}_x^{(m)}$	${}_{h\|}\ddot{a}_x^{\{m\}}=\frac{\delta}{d^{(m)}}{}_{h\|}\bar{a}_x$ ${}_{h\|}\ddot{a}_x^{\{1\}}=\frac{\delta}{d}{}_{h\|}\bar{a}_x$
n 年定期 生存年金	$\mathring{a}_{x:\overline{n}\|}^{(m)}=\frac{\delta}{i^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}\|}$ $\mathring{a}_{x:\overline{n}\|}^{(1)}=\mathring{a}_{x:\overline{n}\|}=\frac{\delta}{i}\bar{a}_{x:\overline{n}\|}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}^{\{m\}}=(1+i)^{\frac{1}{m}}\mathring{a}_{x:\overline{n}\|}^{(m)}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}^{\{m\}}=\frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{x:\overline{n}\|}$ $\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}^{\{1\}}=\frac{\delta}{d}\bar{a}_{x:\overline{n}\|}$

第三章 均衡纯保费

1. **纯保费计算原理**：未来给付保险金额现值的期望值(即趸缴纯保费)等于未来缴纳纯保费的精算现值，又称为平衡原理或精算等价原理。若用 L 表示保险给付金额现值与被保险人缴付纯保费现值之差，即 L 为保险人的未来损失的现值随机变量，则平衡原理又可表述为 $E(L)=0$。

2. **年缴纯保费**的分类

(1)**全离散式寿险模型的年缴纯保费**：纯保费分若干次于年初缴付；死亡受益金于被保险人死亡年末给付；

(2)**全连续式寿险模型的年缴纯保费**：纯保费按连续方式缴付，死亡受益金于被保险人死亡时立即给付；

(3)**半连续式寿险模型的年缴纯保费**：纯保费分若干次于年初缴付；死亡受益金于被保险人死亡时立即给付。

(4)**每年真实分 m 次缴付的年缴纯保费**；

(5)**比例保费**：纯保费分若干次于年初缴付；死亡受益金于被保险人死亡时立即给付，并根据死亡时间与下一次预定缴费时间间隔长短退还部分保费。

3. 年缴纯保费的计算

Piple学习资料

年缴纯保费 P	全离散式寿险模型	全连续式寿险模型	半连续式寿险模型	每年真实分 m 次缴付	比例保费
(终身缴费) 终身寿险	$P_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_x}$ $=\frac{1-d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}=\frac{dA_x}{1-A_x}$	$\bar{P}(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$ $=\frac{1-\delta\bar{a}_x}{\bar{a}_x}=\frac{\delta\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}$	$P(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}$ $=\frac{i}{\delta}P_x$ (UDD)	$P_x^{(m)}=\frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$ $=\frac{d^{(m)}A_x}{1-\frac{i}{i^{(m)}}A_x}$ (UDD)	$P^{\{m\}}(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{\{m\}}}$ $=\frac{d^{(m)}}{\delta}\bar{P}(\bar{A}_x)$
	$D(L)=(1+\frac{P_x}{d})^2({}^2A_x-A_x^{\,2})$ $=\frac{1}{(d\ddot{a}_x)^2}({}^2A_x-A_x^{\,2})$ $=\frac{1}{(1-A_x)^2}({}^2A_x-A_x^{\,2})$	$D(L)=[1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}]^2[{}^2\bar{A}_x-(\bar{A}_x)^2]$ $=\frac{1}{(\delta\bar{a}_x)^2}[{}^2\bar{A}_x-(\bar{A}_x)^2]$ $=\frac{1}{(1-\bar{A}_x)^2}[{}^2\bar{A}_x-(\bar{A}_x)^2]$			$P(\bar{A}_x^{\mathrm{PR}})=P^{\{1\}}(\bar{A}_x)-P(\bar{A}_x)$ $=\frac{\bar{A}_x(\bar{A}_x-A_x)}{(1-\bar{A}_x)\ddot{a}_x}$
h 年限期缴费 终身寿险	${}_hP_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$	${}_hP(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$ $=\frac{i}{\delta}{}_hP_x$ (UDD)	${}_hP_x^{(m)}=\frac{A_x}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}\rvert}}$ $=\frac{d^{(m)}A_x}{1-{}_hE_x-\frac{i}{i^{(m)}}A^1_{x:\overline{h}\rvert}}$ (UDD)	

(n 年缴费) n 年定期保险	$P^1_{x:\overline{n}\rvert}=\frac{A^1_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$	$\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert})=\frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$ $=\frac{1-\delta\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}-{}_nE_x}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}=\frac{\delta\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}}$	$P(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert})=\frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$ $=\frac{i}{\delta}P^1_{x:\overline{n}\rvert}$ (UDD)	$P^{1(m)}_{x:\overline{n}\rvert}=\frac{A^1_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}\rvert}}$ $=\frac{d^{(m)}A^1_{x:\overline{n}\rvert}}{1-{}_nE_x-\frac{i}{i^{(m)}}A^1_{x:\overline{n}\rvert}}$ (UDD)	
(n 年缴费) n 年生存保险	$P_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}=\frac{A_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$	$\bar{P}(A_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1})=\frac{A_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$			
(n 年缴费) n 年两全保险	$P_{x:\overline{n}\rvert}=\frac{A_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$ $=\frac{1-\delta\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}=\frac{\delta\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}}$	$P(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$ $=\frac{i}{\delta}P^1_{x:\overline{n}\rvert}+P_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}$ (UDD)	$P^{(m)}_{x:\overline{n}\rvert}=\frac{A_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}\rvert}}$ $=\frac{d^{(m)}A_{x:\overline{n}\rvert}}{1-{}_nE_x-\frac{i}{i^{(m)}}A^1_{x:\overline{n}\rvert}}$ (UDD)	
h 年限期缴费 n 年定期保险	${}_hP^1_{x:\overline{n}\rvert}=\frac{A^1_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$	${}_h\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert})=\frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}}{\bar{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$	${}_hP(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert})=\frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$	${}_hP^{1(m)}_{x:\overline{n}\rvert}=\frac{A^1_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}\rvert}}$	${}_hP^{\{m\}}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert})=\frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\overline{h}\rvert}}$

			$=\frac{i}{\delta}{}_hP^1_{x:\overline{n}\|}$ (UDD)	$=\frac{d^{(m)}A^1_{x:\overline{n}\|}}{1-{}_hE_x-\frac{i}{i^{(m)}}A^1_{x:\overline{h}\|}}$ (UDD)	$=\frac{d^{(m)}}{\delta}{}_h\overline{P}(\overline{A}^1_{x:\overline{n}\|})$
h 年限期缴费 n 年生存保险	${}_hP_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1}=\frac{A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\|}}$	${}_h\overline{P}(A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1})=\frac{A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1}}{\overline{a}_{x:\overline{h}\|}}$			
h 年限期缴费 n 年两全保险	${}_hP_{x:\overline{n}\|}=\frac{A_{x:\overline{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\|}}$	${}_h\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}\|})=\frac{\overline{A}_{x:\overline{n}\|}}{\overline{a}_{x:\overline{h}\|}}$	${}_hP(\overline{A}_{x:\overline{n}\|})=\frac{\overline{A}_{x:\overline{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\|}}$ $=\frac{i}{\delta}{}_hP^1_{x:\overline{n}\|}+{}_hP_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1}$ (UDD)	${}_hP^{(m)}_{x:\overline{n}\|}=\frac{A_{x:\overline{n}\|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}\|}}$ $=\frac{d^{(m)}A_{x:\overline{n}\|}}{1-{}_hE_x-\frac{i}{i^{(m)}}A^1_{x:\overline{h}\|}}$ (UDD)	
(n 年缴费) n 年延期 终身生存年金	$P({}_{n\|}\ddot{a}_x)=\frac{{}_{n\|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}$	$\overline{P}({}_{n\|}\overline{a}_x)=\frac{{}_{n\|}\overline{a}_x}{\overline{a}_{x:\overline{n}\|}}$			
h 年限期缴费 n 年延期 终身生存年金	${}_hP({}_{n\|}\ddot{a}_x)=\frac{{}_{n\|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\|}}$				

第四章 均衡纯保费的责任准备金

1. **责任准备金**的计算原理

(1)过去法：时刻 t 的准备金＝已缴纯保费在时刻 t 的精算积累值－以往保险利益在时刻 t 的精算积累值；

(2)未来法：时刻 t 的准备金＝未来保险利益在时刻 t 的精算现值－未缴纯保费在时刻 t 的精算现值。

2. ${}_nE_x=v^n\cdot{}_np_x$ 为 x 岁的人在第 n 年末仍然生存时 1 个单位的精算现值；而 $\frac{1}{{}_nE_x}$ 则为 1 个单位当 x 岁的人在第 n 年末仍然生存时的精算积累值。

3. 责任准备金的计算

(1)全离散式寿险模型，时刻 k 的未来损失 ${}_kL$＝未来保险利益在时刻 k 的精算现值－未缴纯保费在时刻 k 的精算现值；

(2)全连续式寿险模型，时刻 t 的未来损失 ${}_tL$＝未来保险利益在时刻 t 的精算现值－未缴纯保费在时刻 t 的精算现值。

注：默认均为未来法公式。



责任准备金 V	全离散式寿险模型	全连续式寿险模型
(终身缴费) 终身寿险	${}_kV_x = A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k} = 1-\frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}$ $= \frac{P_x\ddot{a}_{x:\overline{k}\rceil}}{{}_kE_x} - \frac{A^1_{x:\overline{k}\rceil}}{{}_kE_x}$ (过去法公式) 递推公式 $l_{x+t}({}_tV_x+P_t)(1+i)=d_{x+t}\cdot b_{t+1}+l_{x+t+1}\cdot {}_{t+1}V_x$ $=d_{x+t}(b_{t+1}-{}_{t+1}V_x)+l_{x+t}\cdot {}_{t+1}V_x$ $({}_tV_x+P_t)(1+i)=q_{x+t}\cdot b_{t+1}+p_{x+t}\cdot {}_{t+1}V_x$ $=q_{x+t}(b_{t+1}-{}_{t+1}V_x)+{}_{t+1}V_x$，其中 P_t：第 $t+1$ 年初付纯保费 $({}_tV_x+P_t)$：第 $t+1$ 年初的责任准备金 b_{t+1}：死亡年末赔付额 $(b_{t+1}-{}_{t+1}V_x)$：第 $t+1$ 年的净风险保额	${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)=\bar{A}_{x+t}-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}=1-\frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}$ $=[\bar{P}(\bar{A}_{x+t})-\bar{P}(\bar{A}_x)]\bar{a}_{x+t}$ (保费差公式) $=\bar{A}_{x+t}[1-\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t})}]$ (缴清寿险公式) $=\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x:\overline{t}\rceil}}{{}_tE_x}-\frac{\bar{A}^1_{x:\overline{t}\rceil}}{{}_tE_x}$ (过去法公式)
	$E({}_kL)={}_kV_x$ $D({}_kL)=[1+\frac{P_x}{d}]^2[{}^2A_{x+k}-(A_{x+k})^2]$	$E({}_tL)={}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ $D({}_tL)=[1+\frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}]^2[{}^2\bar{A}_{x+t}-(\bar{A}_{x+t})^2]$
h 年限期缴费 终身寿险	${}^h_kV_x=\begin{cases}A_{x+k}-{}_hP_x\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rceil} & (k<h)\\ A_{x+k} & (k\ge h)\end{cases}$	${}^h_t\bar{V}(\bar{A}_x)=\begin{cases}\bar{A}_{x+t}-{}_h\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}\rceil} & (t<h)\\ \bar{A}_{x+t} & (t\ge h)\end{cases}$

	$=\begin{cases}\frac{{}_hP_x\ddot{a}_{x:\overline{k}\rceil}}{{}_kE_x}-\frac{A^1_{x:\overline{k}\rceil}}{{}_kE_x} & (k<h)\\ \frac{{}_hP_x\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}{{}_kE_x}-\frac{A^1_{x:\overline{k}\rceil}}{{}_kE_x} & (k\ge h)\end{cases}$ (过去法公式) $=\begin{cases}\frac{M_{x+k}-{}_hP_x(N_{x+k}-N_{x+n})}{D_{x+k}} & (k<h)\\ \frac{M_{x+k}}{D_{x+k}} & (k\ge h)\end{cases}$ $=\begin{cases}\frac{{}_hP_x(N_x-N_{x+k})}{D_{x+k}}-\frac{M_x-M_{x+k}}{D_{x+k}} & (k<h)\\ \frac{{}_hP_x(N_x-N_{x+h})}{D_{x+k}}-\frac{M_x-M_{x+k}}{D_{x+k}} & (k\ge h)\end{cases}$ (过去法公式)	
(n 年缴费) n 年定期保险	${}_kV^1_{x:\overline{n}\rceil}=A^1_{x+k:\overline{n-k}\rceil}-P^1_{x:\overline{n}\rceil}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rceil}$ $(k<n)$ $=\frac{P^1_{x:\overline{n}\rceil}\ddot{a}_{x:\overline{k}\rceil}}{{}_kE_x}-\frac{A^1_{x:\overline{k}\rceil}}{{}_kE_x}$ (过去法公式)	${}_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})=\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}\rceil}-\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rceil}$ $(t<n)$ $=[\bar{P}(\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}\rceil})-\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})]\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rceil}$ (保费差公式) $=\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}\rceil}[1-\frac{\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rceil})}{\bar{P}(\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}\rceil})}]$ (缴清寿险公式)

		$= \dfrac{\bar P(\bar A^1_{x:\overline{n}\vert})\bar a_{x:\overline{t}\vert}}{{}_tE_x} - \dfrac{\bar A^1_{x:\overline{t}\vert}}{{}_tE_x}$ (过去法公式)
(n 年缴费) n 年两全保险	${}_kV_{x:\overline{n}\vert} = \begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\vert} - P_{x:\overline{n}\vert}\ddot a_{x+k:\overline{n-k}\vert} & (k<n) \\ 1 & (k=n) \end{cases}$ $= \dfrac{P_{x:\overline{n}\vert}\ddot a_{x:\overline{k}\vert}}{{}_kE_x} - \dfrac{A^1_{x:\overline{k}\vert}}{{}_kE_x}$ (过去法公式)	${}_t\bar V(\bar A_{x:\overline{n}\vert}) = \begin{cases} \bar A_{x+t:\overline{n-t}\vert} - \bar P(\bar A_{x:\overline{n}\vert})\bar a_{x+t:\overline{n-t}\vert} & (t<n) \\ 1 & (t=n) \end{cases}$ $= [\bar P(\bar A_{x+t:\overline{n-t}\vert}) - \bar P(\bar A_{x:\overline{n}\vert})]\bar a_{x+t:\overline{n-t}\vert}$ (保费差公式) $= \bar A_{x+t:\overline{n-t}\vert}[1 - \dfrac{\bar P(\bar A_{x:\overline{n}\vert})}{\bar P(\bar A_{x+t:\overline{n-t}\vert})}]$ (缴清寿险公式) $= \dfrac{\bar P(\bar A_{x:\overline{n}\vert})\bar a_{x:\overline{t}\vert}}{{}_tE_x} - \dfrac{\bar A^1_{x:\overline{t}\vert}}{{}_tE_x}$ (过去法公式)
h 年限期缴费 n 年定期保险	${}^h_kV^1_{x:\overline{n}\vert} = \begin{cases} A^1_{x+k:\overline{n-k}\vert} - {}_hP^1_{x:\overline{n}\vert}\ddot a_{x+k:\overline{h-k}\vert} & (k<h) \\ A^1_{x+k:\overline{n-k}\vert} & (h \le k < n) \end{cases}$ $= \begin{cases} \dfrac{{}_hP^1_{x:\overline{n}\vert}\ddot a_{x:\overline{k}\vert}}{{}_kE_x} - \dfrac{A^1_{x:\overline{k}\vert}}{{}_kE_x} & (k<h) \\ \dfrac{{}_hP^1_{x:\overline{n}\vert}\ddot a_{x:\overline{h}\vert}}{{}_kE_x} - \dfrac{A^1_{x:\overline{k}\vert}}{{}_kE_x} & (k \ge h) \end{cases}$ (过去法公式)	${}^h_t\bar V(\bar A^1_{x:\overline{n}\vert}) = \begin{cases} \bar A^1_{x+t:\overline{n-t}\vert} - {}_h\bar P(\bar A^1_{x:\overline{n}\vert})\bar a_{x+t:\overline{h-t}\vert} & (t<h) \\ \bar A^1_{x+t:\overline{n-t}\vert} & (h \le t < n) \end{cases}$

h 年限期缴费 n 年两全保险	${}^h_kV_{x:\overline{n}\vert} = \begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\vert} - {}_hP_{x:\overline{n}\vert}\ddot a_{x+k:\overline{h-k}\vert} & (k<h) \\ A_{x+k:\overline{n-k}\vert} & (h \le k < n) \\ 1 & (k=n) \end{cases}$ $= \begin{cases} \dfrac{{}_hP_{x:\overline{n}\vert}\ddot a_{x:\overline{k}\vert}}{{}_kE_x} - \dfrac{A^1_{x:\overline{k}\vert}}{{}_kE_x} & (k<h) \\ \dfrac{{}_hP_{x:\overline{n}\vert}\ddot a_{x:\overline{h}\vert}}{{}_kE_x} - \dfrac{A^1_{x:\overline{k}\vert}}{{}_kE_x} & (k \ge h) \end{cases}$ (过去法公式)	${}^h_t\bar V(\bar A_{x:\overline{n}\vert}) = \begin{cases} \bar A_{x+t:\overline{n-t}\vert} - {}_h\bar P(\bar A_{x:\overline{n}\vert})\bar a_{x+t:\overline{h-t}\vert} & (t<h) \\ \bar A_{x+t:\overline{n-t}\vert} & (h \le t < n) \\ 1 & (t=n) \end{cases}$
(n 年缴费) n 年延期 终身生存年金	${}_kV({}_{n\vert}\ddot a_x) = \begin{cases} \ddot a_{x+n}v^{n-k}{}_{n-k}p_{x+k} - P({}_{n\vert}\ddot a_x)\ddot a_{x+k:\overline{n-k}\vert} & (k<n) \\ \ddot a_{x+k} & (k \ge n) \end{cases}$ $= \begin{cases} \dfrac{P({}_{n\vert}\ddot a_x)\ddot a_{x:\overline{k}\vert}}{{}_kE_x} & (k<n) \\ \dfrac{P({}_{n\vert}\ddot a_x)\ddot a_{x:\overline{n}\vert}}{{}_kE_x} - \dfrac{{}_{n\vert}\ddot a_{x:\overline{k-n}\vert}}{{}_kE_x} & (k \ge n) \end{cases}$ (过去法公式) $= \begin{cases} \dfrac{P({}_{n\vert}\ddot a_x)N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} \text{(过去法公式)} & (k<n) \\ \dfrac{N_{x+k}}{D_{x+k}} & (k \ge n) \end{cases}$	${}_t\bar V({}_{n\vert}\bar a_x) = \begin{cases} \bar a_{x+n}v^{n-t}{}_{n-t}p_{x+t} - \bar P({}_{n\vert}\bar a_x)\bar a_{x+t:\overline{n-t}\vert} & (t<n) \\ \bar a_{x+t} & (t \ge n) \end{cases}$ $= \begin{cases} \dfrac{\bar P({}_{n\vert}\bar a_x)\bar a_{x:\overline{t}\vert}}{{}_tE_x} & (t<n) \\ \dfrac{\bar P({}_{n\vert}\bar a_x)\bar a_{x:\overline{n}\vert}}{{}_tE_x} - \dfrac{{}_{n\vert}\bar a_{x:\overline{t-n}\vert}}{{}_tE_x} & (t \ge n) \end{cases}$ (过去法公式)
h 年限期缴费 n 年延期 终身生存年金		${}^h_t\bar V({}_{n\vert}\bar a_x) = \begin{cases} \bar a_{x+n}v^{n-t}{}_{n-t}p_{x+t} - {}_h\bar P({}_{n\vert}\bar a_x)\bar a_{x+t:\overline{h-t}\vert} & (t<h) \\ \bar a_{x+n}v^{n-t}{}_{n-t}p_{x+t} & (h \le t < n) \\ \bar a_{x+t} & (t \ge n) \end{cases}$

责任准备金 V	半连续式寿险模型
(终身缴费) 终身寿险	${}_tV(\bar{A}_x)=\bar{A}_{x+t}-P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+t}$ $=\frac{i}{\delta}{}_tV_x$ (UDD)
h 年限期缴费 终身寿险	${}^h_tV(\bar{A}_x)=\begin{cases}\bar{A}_{x+t}-{}_hP(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t\|}} & (t<h)\\ \bar{A}_{x+t} & (t\ge h)\end{cases}$ $=\frac{i}{\delta}{}^h_tV_x$ (UDD)
(n 年缴费) n 年定期保险	${}_tV(\bar{A}^1_{x:\overline{n\|}})=\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t\|}}-P(\bar{A}^1_{x:\overline{n\|}})\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t\|}}\ (t<n)$ $=\frac{i}{\delta}{}_tV^1_{x:\overline{n\|}}$ (UDD)
(n 年缴费) n 年两全保险	${}_tV(\bar{A}_{x:\overline{n\|}})=\begin{cases}\bar{A}_{x+t:\overline{n-t\|}}-P(\bar{A}_{x:\overline{n\|}})\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t\|}} & (t<n)\\ 1 & (t=n)\end{cases}$ $=\frac{i}{\delta}{}_tV^1_{x:\overline{n\|}}+{}_tV_{x:\overline{n\|}}^{\;\;1}$ (UDD)
h 年限期缴费 n 年定期保险	${}^h_tV(\bar{A}^1_{x:\overline{n\|}})=\begin{cases}\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t\|}}-{}_hP(\bar{A}^1_{x:\overline{n\|}})\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t\|}} & (t<h)\\ \bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t\|}} & (h\le t<n)\end{cases}$ $=\frac{i}{\delta}{}^h_tV^1_{x:\overline{n\|}}$ (UDD)
h 年限期缴费 n 年两全保险	${}^h_tV(\bar{A}_{x:\overline{n\|}})=\begin{cases}\bar{A}_{x+t:\overline{n-t\|}}-{}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n\|}})\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t\|}} & (t<h)\\ \bar{A}_{x+t:\overline{n-t\|}} & (h\le t<n)\\ 1 & (t=n)\end{cases}$ $=\frac{i}{\delta}{}^h_tV^1_{x:\overline{n\|}}+{}^h_tV_{x:\overline{n\|}}^{\;\;1}$ (UDD)

责任准备金 V	每年分 m 次真实缴费	比例保费	趸缴纯保费
终身寿险	${}_tV_x^{(m)} = A_{x+t} - P_x^{(m)}\ddot{a}_{x+t}^{(m)}$ ${}_tV_x^{(m)} - {}_tV_x = \beta(m)P_x^{(m)}\,{}_tV_x$，其中 $\beta(m) = \frac{i^{(m)} - i}{i^{(m)}d^{(m)}}$	${}_tV^{\{m\}}(\bar{A}_x) = {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ ${}_tV^{\{1\}}(\bar{A}_x) = {}_tV(\bar{A}_x) + {}_tV(\bar{A}_x^{\text{PR}}) = {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$	${}_kV_x = A_{x+k}$ $= \frac{A_x}{{}_kE_x} - \frac{A^1_{x:\overline{k}\vert}}{{}_kE_x}$ (过去法公式)
	每年分 2 次真实缴费的责任准备金 V 的近似计算 $\begin{cases} {}_{k+s}V_x^{(2)} \approx (1-s)\cdot{}_kV_x^{(2)} + s\cdot{}_{k+1}V_x^{(2)} + (\frac{1}{2} - s)P_x^{(2)} & (0 < s < \frac{1}{2}) \\ {}_{k+s}V_x^{(2)} \approx (1-s)\cdot{}_kV_x^{(2)} + s\cdot{}_{k+1}V_x^{(2)} + (1-s)P_x^{(2)} & (\frac{1}{2} < s < 1) \end{cases}$ 假设 UDD，且年利率 i 与 q_{x+k} 均很小。		$E({}_kL) = {}_kV_x$ $D({}_kL) = {}^2A_{x+k} + (A_{x+k})^2$
终身生存年金			${}_kV_x = \ddot{a}_{x+k}$ $= \frac{\ddot{a}_x}{{}_kE_x} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{k}\vert}}{{}_kE_x}$ (过去法公式)
			$E({}_kL) = \ddot{a}_{x+k}$ $D({}_kL) = \frac{1}{d^2}[{}^2A_{x+k} - (A_{x+k})^2]$

第五章 总保费与修正准备金

1. 总保费厘订原理：总保费的精算现值＝保险给付的精算现值＋保险费用的精算现值

对于保额为 b 的保单，总保费为 $G(b)=ab+c+fG(b)$，其中 a 为直接与保额变化相联系的那些保险成本的组成部分，每单位保额是其中最大的部分，c 为保单费用，f 是随保费变化的用于支付费用的保费比例，于是

$$G(b)=b\frac{a+\frac{c}{b}}{1-f}=bR(b)$$，其中 $R(b)=\dfrac{a+\frac{c}{b}}{1-f}$ 即为保额为 b 的保单的费率。

2. **保险费率**的计算方法

(1)分级费率法：将保单根据保额分成若干等级，在每一等级内根据保额的分布求出保额均值，再以该均值通过 $R(b)=\dfrac{a+\frac{c}{b}}{1-f}$ 计算出一个费率作为该等级内所有保单的费率。

(2)保单费附加法：设 $R(b)=\dfrac{a+\frac{c}{b}}{1-f}=a'+\dfrac{c'}{b}$，其中 $a'=\dfrac{a}{1-f}$，$c'=\dfrac{c}{1-f}$，则总保费 $G(b)=bR(b)=ba'+c'$。显然 a' 是没有考虑保单费用时的费率，c' 称为保单费(不同于保单费用 c)。当加进保单费用而使总保费增加时，代理人佣金、保费税等按保费百分比计算的支出亦相应增加，这时总保费的增加数即保单费 $\dfrac{c}{1-f}>c$。

3. **总保费准备金**

过去法：总保费准备金＝过去总保费收入的精算积累值－过去保险给付与费用支出的精算积累值

未来法：总保费准备金＝未来保险给付与费用支出的精算现值－未来总保费收入的精算现值

若定义包含费用的损失变量 L_e＝未来保险给付与费用支出的现值－未来总保费收入的现值，则 $E(L_e)$即为总保费准备金。

4. **预期盈余**的计算

(1)不考虑费用

$${}_{h-1}p_x({}_{h-1}V_x+P_x)(1+i)-{}_{h-1}p_x\cdot q_{x+h-1}={}_hp_x\cdot{}_hV_x\ (h=1,2,3,\cdots)$$

结论：在没有初始基金、利润及意外灾难附加保费时，预期盈余总是 0。

(2)考虑费用

$${}_{h-1}p_x\{[{}_{h-1}V_x+u(h-1)]+(P_x+c)-e_{h-1}\}(1+i)-{}_{h-1}p_x\cdot q_{x+h-1}={}_hp_x\cdot[{}_hV_x+u(h)]$$

$(h=1,2,3,\cdots)$，其中 $u(h)$为第 h 年的目标盈余，于是

$${}_hp_xu(h)=\sum_{j=1}^{h}(1+i)^{h-j+1}\cdot{}_{j-1}p_x(c-e_{j-1})$$

结论：第 h 期预期盈余是前面各期的贡献 ${}_{j-1}p_x(c-e_{j-1})$的积累值。

5. 在考虑费用计算预期盈余时，对于较小的 h，预期盈余可能是负值，因为保单初期费用较大，因此就会出现资产小于负债的情况，可能采用的几种解决办法有：

(1)拥有附加资本，即 $u(0)>0$，使得 $u(0)(1+i)^h+\sum_{j=1}^{h}(1+i)^{h-j+1}\cdot{}_{j-1}p_x(c-e_{j-1})$，对 $h=1,2,3,\cdots$均为正数；

(2)附加保费随保单年度变化，使得$(c_{h-1}-e_{h-1})\geqslant 0\ (h=1,2,3,\cdots)$；

(3)采用修正准备金原理，减小最初几个保单年度的准备金。

6. **修正准备金**的一般方法：初年度纯保费为 α；往后 $j-1$ 年纯保费为 β；j 年之后的纯保费即为原来的均衡纯保费 P，于是有：

(1) $\alpha+\beta a_{x:\overline{j-1}|}+P\cdot{}_{j|}\ddot{a}_{x:\overline{h-j}|}=P\cdot\ddot{a}_{x:\overline{h}|}$；

(2) $\alpha+\beta a_{x:\overline{j-1}|}=P\cdot\ddot{a}_{x:\overline{j}|}$，另两个常用形式为 $\beta=P+\dfrac{P-\alpha}{a_{x:\overline{j-1}|}}$，$\beta=P+\dfrac{\beta-\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}}$。

7. **一年定期修正制(FPT)**

(1)对于离散型寿险，由于 ${}_1V_x^{\mathrm{FPT}}=\dfrac{\alpha-A^1_{x:\overline{1}|}}{{}_1E_x}\geq 0$，则取初年度纯保费 $\alpha=A^1_{x:\overline{1}|}$，并使整个缴费期为修正期，于是续年度纯保费 $\beta=\dfrac{A^1_{x+1:\overline{h-1}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}}$；

(2)对于连续型寿险，由于 ${}_1\overline{V}_x^{\mathrm{FPT}}=\dfrac{\overline{\alpha}\overline{a}_{x:\overline{1}|}-\overline{A}^1_{x:\overline{1}|}}{{}_1E_x}\geq 0$，则取初年度纯保费 $\overline{\alpha}=\dfrac{\overline{A}^1_{x:\overline{1}|}}{\overline{a}_{x:\overline{1}|}}$，并使整个缴费期为修正期，于是续年度纯保费 $\overline{\beta}=\dfrac{\overline{A}^1_{x+1:\overline{h-1}|}}{\overline{a}_{x+1:\overline{h-1}|}}$。

8. 在均衡纯保费准备金方法(NLP)中 $G=P+C$；而在 FPT 法中 $G=A^1_{x:\overline{1}|}+C_0=\beta+C_1$，

Piple学习资料

其中 C_0 为初年度附加保费，C_1 为续年度附加保费，于是 $C_0=C+(P-A_{x:\overline{1}|}^{1})$，即相当于 FPT 法在初年度提供了一个费用补贴 $(P-A_{x:\overline{1}|}^{1})$。

9. **保单分类修正制**：美国保险监督官标准(CRVM)

(1)满足 $\beta^{\text{FPT}}>{}_{19}P_{x+1}$ 的保单为高保费保单，其中 β^{FPT} 为该寿险按 20 年缴费使用 FPT 法时的续年度纯保费；

(2)FPT 法为提存低保费保单准备金的最低要求；

(3)对于高保费保单，使用一特定的保险监督官准备金计算法(简记为 Com)，这个方法中规定保费缴纳期为修正期，并且 $\beta^{\text{Com}}-\alpha^{\text{Com}}={}_{19}P_{x+1}-A_{x:\overline{1}|}^{1}$，于是

$$\beta^{\text{Com}}=P+\frac{{}_{19}P_{x+1}-A_{x:\overline{1}|}^{1}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$$，其中 h 为缴费年限。

10. 加拿大责任准备金修正法

若 $C_0=C+(P-A_{x:\overline{1}|}^{1})<e_0$，则准备金标准可以比一年定期修正制更低。

(1)若所承保险种的均衡纯保费 P 小于或等于相同年龄投保的终身寿险均衡纯保费 P_x 时，用 FPT 修正法计算；

(2)若 $P>P_x$ 时，用加拿大修正法计算；

(3)加拿大修正法在全部缴费期修正纯保费，且规定保险第 1 年均衡纯保费中可用于营业费用支出的部分等于 $(P_x-A_{x:\overline{1}|}^{1})$，并且 $\alpha^{\text{can}}=P-(P_x-A_{x:\overline{1}|}^{1})$，于是

$$\beta^{\text{can}}=P+\frac{P-\alpha^{\text{can}}}{a_{x:\overline{h-1}|}}=P+\frac{P_x-A_{x:\overline{1}|}^{1}}{a_{x:\overline{h-1}|}}$$，其中 h 为缴费年限。

第六章 多元生命函数

1. 一般地，设 u 为一组生命的状态，则

   ${}_tq_u=P$\{状态 u 在 t 年内消失\}；

   ${}_{t|}q_u=P$\{状态 u 在第 $t+1$ 年内消失\}。

2. **联合生存状态**(xy)**与最后生存状态**$(\overline{xy})$

	联合生存状态(xy)	相互间联系	最后生存状态$(\overline{xy})$
定义	状态 x 与状态 y 均存在		状态 x 与状态 y 至少有一个存在
令	$T(xy)$为(xy)的未来存续时间随机变量	$T(xy)+T(\overline{xy})=T(x)+T(y)$ $T(xy)\cdot T(\overline{xy})=T(x)\cdot T(y)$	$T(\overline{xy})$ 为$(\overline{xy})$的未来存续时间随机变量
分布函数	$F_{T(xy)}(t)={}_tq_{xy}=1-{}_tp_x\cdot{}_tp_y$ $={}_tq_x+{}_tq_y-{}_tq_x\cdot{}_tq_y$	$F_{T(xy)}(t)+F_{T(\overline{xy})}(t)=F_{T(x)}(t)+F_{T(y)}(t)$	$F_{T(\overline{xy})}(t)={}_tq_{\overline{xy}}={}_tq_x\cdot{}_tq_y$ $=1-{}_tp_x-{}_tp_y+{}_tp_x\cdot{}_tp_y$
生存函数	${}_tp_{xy}={}_tp_x\cdot{}_tp_y$	${}_tp_{xy}+{}_tp_{\overline{xy}}={}_tp_x+{}_tp_y$	${}_tp_{\overline{xy}}={}_tp_x+{}_tp_y-{}_tp_x\cdot{}_tp_y=1-{}_tq_x\cdot{}_tq_y$
密度函数	$f_{T(xy)}(t)={}_tp_{xy}\cdot\mu_{xy+t}$ $={}_tp_x\cdot{}_tp_y(\mu_{x+t}+\mu_{y+t})$	$f_{T(xy)}(t)+f_{T(\overline{xy})}(t)=f_{T(x)}(t)+f_{T(y)}(t)$	$f_{T(\overline{xy})}(t)={}_tp_x\cdot\mu_{x+t}+{}_tp_y\cdot\mu_{y+t}-$ ${}_tp_x\cdot{}_tp_y(\mu_{x+t}+\mu_{y+t})$
死力	$\mu_{xy+t}=\mu_{x+t}+\mu_{y+t}$		$\mu_{\overline{xy}+t}=\dfrac{f_{T(\overline{xy})}(t)}{1-F_{T(\overline{xy})}(t)}$
	${}_{t\|}q_{xy}={}_tp_{xy}(1-p_{x+t}\cdot p_{y+t})$ $={}_tp_x\cdot{}_tp_y(q_{x+t}+q_{y+t}-q_{x+t}\cdot q_{y+t})$	${}_{t\|}q_{xy}+{}_{t\|}q_{\overline{xy}}={}_{t\|}q_x+{}_{t\|}q_y$	${}_{t\|}q_{\overline{xy}}={}_tq_x\cdot{}_tp_y\cdot q_{y+t}+{}_tq_y\cdot{}_tp_x\cdot q_{x+t}+$ ${}_tp_x\cdot{}_tp_y\cdot q_{x+t}\cdot q_{y+t}$
未来期望寿命	$\dot{e}_{xy}=E[T(xy)]$ $=\int_0^{+\infty}t\cdot{}_tp_{xy}\cdot\mu_{xy+t}dt=\int_0^{+\infty}{}_tp_{xy}dt$	$\dot{e}_{xy}+\dot{e}_{\overline{xy}}=\dot{e}_x+\dot{e}_y$	$\dot{e}_{\overline{xy}}=E[T(\overline{xy})]$
	$D[T(xy)]=E[T^2(xy)]-\{E[T(xy)]\}^2$ $=\int_0^{+\infty}t^2\cdot{}_tp_{xy}\cdot\mu_{xy+t}dt-(\dot{e}_{xy})^2$ $=2\int_0^{+\infty}t\cdot{}_tp_{xy}dt-(\dot{e}_{xy})^2$	$\mathrm{Cov}[T(xy),T(\overline{xy})]$ $=E[T(xy)\cdot T(\overline{xy})]-E[T(xy)]\cdot E[T(\overline{xy})]$ $=(\dot{e}_x-\dot{e}_{xy})(\dot{e}_y-\dot{e}_{xy})>0$	$D[T(\overline{xy})]=E[T^2(\overline{xy})]-\{E[T(\overline{xy})]\}^2$ $=2\int_0^{+\infty}t\cdot{}_tp_{\overline{xy}}dt-(\dot{e}_{\overline{xy}})^2$
未来期望 整数寿命	$e_{xy}=E[K(xy)]$ $=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot{}_kp_{xy}\cdot q_{xy+k}=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{k+1}p_{xy}$	$e_{xy}+e_{\overline{xy}}=e_x+e_y$	$e_{\overline{xy}}=E[K(\overline{xy})]=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{k+1}p_{\overline{xy}}$
离散型终身寿险 趸缴纯保费	$A_{xy}=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_{k\|}q_{xy}$	$A_{xy}+A_{\overline{xy}}=A_x+A_y$	
	$Z=v^T$， $D(Z)={}^2A_{xy}-(A_{xy})^2$		

离散型 终身生存年金	$\ddot{a}_{xy}=\sum_{k=0}^{\infty}v^k\cdot{}_kp_{xy}=\sum_{k=0}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{k+1}\vert}\cdot{}_{k\vert}q_{xy}$ $=\frac{1}{d}(1-A_{xy})$	$\ddot{a}_{xy}+\ddot{a}_{\overline{xy}}=\ddot{a}_x+\ddot{a}_y$	
连续型终身寿险趸缴纯保费	$\bar{A}_{xy}=\int_0^{+\infty}v^t\cdot{}_tp_{xy}\cdot\mu_{xy+t}dt$	$\bar{A}_{xy}+\bar{A}_{\overline{xy}}=\bar{A}_x+\bar{A}_y$	
		$\mathrm{Cov}[v^{T(xy)},v^{T(\overline{xy})}]$ $=E[v^{T(xy)}\cdot v^{T(\overline{xy})}]-E[v^{T(xy)}]\cdot E[v^{T(\overline{xy})}]$ $=(\bar{A}_x-\bar{A}_{xy})(\bar{A}_y-\bar{A}_{xy})$	
连续型 终身生存年金	$\bar{a}_{xy}=\int_0^{+\infty}v^t\cdot{}_tp_{xy}dt$ $=\int_0^{+\infty}\bar{a}_{\overline{t}\vert}\cdot{}_tp_{xy}\cdot\mu_{xy+t}dt$ $=\frac{1}{\delta}(1-\bar{A}_{xy})$	$\bar{a}_{xy}+\bar{a}_{\overline{xy}}=\bar{a}_x+\bar{a}_y$	
每年付 m 次的 终身生存年金	$\ddot{a}_{xy}^{(m)}=\frac{1}{d^{(m)}}(1-A_{xy}^{(m)})$		

3. 在特殊假设下联合生存函数及其趸缴纯保费的估值

Gompertz 假设	Makeham 假设	UDD 假设
$\mu_{xy+t}=Bc^{x+t}+Bc^{y+t}$	$\mu_{xy+t}=2A+Bc^{x+t}+Bc^{y+t}$	${}_tp_{xy}\cdot\mu_{xy+t}={}_tq_{xy}+(1-2t)q_x\cdot q_y$
对应单一生命 $\mu_{w+t}=\mu_{xy+t}=Bc^{w+t}$ $c^w=c^x+c^y$ ${}_tp_{xy}={}_tp_w$ 若 $y=x+n$，$w=x+t$，则 $c^{x+t}=c^x+c^{x+n}$ $t=\dfrac{\ln(1+c^n)}{\ln c}$	对应联合生命 $\mu_{ww+t}=\mu_{xy+t}=2A+2Bc^{w+t}$ $2c^w=c^x+c^y$ ${}_tp_{ww}=({}_tp_w)^2={}_tp_x\cdot{}_tp_y$ 若 $y=x+n$，$w=x+t$，则 $2c^{x+t}=c^x+c^{x+n}$ $t=\dfrac{\ln(1+c^n)-\ln 2}{\ln c}$ ${}_tp_x+{}_tp_y\geqslant 2{}_tp_w$ $a_{\overline{xy}}\geq a_{\overline{ww}}$	$\bar{A}_{xy}\approx\dfrac{i}{\delta}\cdot A_{xy}$ ($T(x),T(y)$～UDD) $\bar{A}_{xy}=\dfrac{i}{\delta}\cdot A_{xy}$ ($T(xy)$～UDD) $A_{xy}^{(m)}\approx\dfrac{i}{i^{(m)}}\cdot A_{xy}$ ($T(x),T(y)$～UDD) $A_{xy}^{(m)}=\dfrac{i}{i^{(m)}}\cdot A_{xy}$ ($T(xy)$～UDD)

4. 考虑死亡顺序的生存模型及其趸缴纯保费

(1)x 在 y 之前并且在 n 年内死亡 ${}_nq_{xy}^{1}=\int_0^n {}_tp_x\cdot\mu_{x+t}\cdot{}_tp_y\,dt=\int_0^n {}_tp_{xy}\cdot\mu_{x+t}\,dt$

$${}_nq_{xy}^{1}=\frac{c^x}{c^x+c^y}\,{}_nq_{xy}\text{ (Gompertz 假设)}$$

$${}_nq_{xy}^{1}=\frac{c^x}{c^x+c^y}\,{}_nq_{xy}+A\left(1-\frac{2c^x}{c^x+c^y}\right)\dot{e}_{xy:\overline{n}|}\text{ (Makeham 假设)}$$

$$A_{xy}^{1}=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_{xy}^{1}=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_{k|}q_x\cdot{}_kp_y\left(1-\frac{1}{2}q_{x+k}\right)$$

$$\bar{A}_{xy}^{1}=\int_0^{+\infty}v^t\cdot{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}\cdot{}_tp_y\,dt=\int_0^{+\infty}v^t\cdot{}_tp_{xy}\cdot\mu_{x+t}\,dt$$

(2)x 在 y 之后并且在 n 年内死亡 ${}_nq_{xy}^{2}=\int_0^n {}_tp_x\cdot\mu_{x+t}\cdot(1-{}_tp_y)\,dt={}_nq_x-{}_nq_{xy}^{1}$

$$\bar{A}_{xy}^{2}=\int_0^{+\infty}v^t\cdot{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}\cdot(1-{}_tp_y)\,dt=\bar{A}_x-\bar{A}_{xy}^{1}$$

第七章 多元风险模型

1. 设 $T(x)$为(x)的未来存续时间随机变量，概率密度函数为 $g(t)$；$J(x)$表示(x)终止原因随机变量，分布律为 $P\{J=j\}=h(j)$；$f(t,j)$为 T,J 的联合概率密度函数，$F(t,j)$为其分布函数，则

$$g(t)=\sum_{j=1}^{m}f(t,j)={}_tp_x^{(\tau)}\cdot\mu_{x+t}^{(\tau)}\qquad f(t,j)={}_tp_x^{(\tau)}\cdot\mu_{x+t}^{(j)}$$

$$h(j\mid T=t)=\frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}}\qquad h(j\mid T\le t)=\frac{{}_tq_x^{(j)}}{{}_tq_x^{(\tau)}}$$

2. 生存分布与生命表函数之间的关系

$${}_tq_x^{(j)}=F(t,j)=\int_0^t f(t,j)\,dt=\int_0^t {}_tp_x^{(\tau)}\cdot\mu_{x+t}^{(j)}\,dt\qquad {}_\infty q_x^{(j)}=h(j)$$

$${}_tq_x^{(\tau)}=\sum_{j=1}^{m}{}_tq_x^{(j)}=G(t)=\int_0^t g(t)\,dt=\int_0^t {}_tp_x^{(\tau)}\cdot\mu_{x+t}^{(\tau)}\,dt\qquad {}_tp_x^{(\tau)}=1-{}_tq_x^{(\tau)}$$

$$q_x^{(\tau)}=\sum_{j=1}^{m}q_x^{(j)}=1-p_x^{(\tau)}$$

$$\mu_{x+t}^{(j)}=\frac{\frac{\partial}{\partial t}{}_tq_x^{(j)}}{{}_tp_x^{(\tau)}}\qquad \mu_{x+t}^{(\tau)}=\sum_{j=1}^{m}\mu_{x+t}^{(j)}$$

$$\mu_x^{(j)}=\frac{-\frac{\partial}{\partial x}l_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}\qquad \mu_x^{(\tau)}=\frac{-\frac{\partial}{\partial x}l_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}$$

$$l_{x+t}^{(\tau)}=l_x^{(\tau)}\cdot{}_tp_x^{(\tau)}\qquad l_{x+1}^{(\tau)}=l_x^{(\tau)}\cdot p_x^{(\tau)}$$

$$l_x^{(\tau)}=\sum_{j=1}^{m}l_x^{(j)}=\int_0^\infty l_{x+t}^{(\tau)}\cdot\mu_{x+t}^{(\tau)}\,dt\text{，其中 }l_x^{(j)}=\sum_{t=0}^{\infty}d_{x+t}^{(j)}=\int_0^\infty l_{x+t}^{(\tau)}\cdot\mu_{x+t}^{(j)}\,dt$$

$${}_td_x^{(j)}=l_x^{(j)}-l_{x+t}^{(j)}=l_x^{(\tau)}\cdot{}_tq_x^{(j)}=\int_0^t l_{x+t}^{(\tau)}\cdot\mu_{x+t}^{(j)}\,dt$$

$$d_x^{(j)}=l_x^{(j)}-l_{x+1}^{(j)}=l_x^{(\tau)}\cdot q_x^{(j)}=\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)}\cdot\mu_{x+t}^{(j)}\,dt$$

$${}_td_x^{(\tau)}=l_x^{(\tau)}-l_{x+t}^{(\tau)}=l_x^{(\tau)}\cdot{}_tq_x^{(\tau)}=\int_0^t l_{x+t}^{(\tau)}\cdot\mu_{x+t}^{(\tau)}\,dt$$

Piple学习资料

$$d_x^{(\tau)}=\sum_{j=1}^{m}d_x^{(j)}=l_x^{(\tau)}-l_{x+1}^{(\tau)}=l_x^{(\tau)}\cdot q_x^{(\tau)}=\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)}\cdot\mu_{x+t}^{(\tau)}dt$$

3. **伴随单风险模型**的生存分布函数

$${}_tp_x^{\prime(j)}=\exp[-\int_0^t\mu_{x+t}^{(j)}dt]$$

$${}_tp_x^{(\tau)}=\prod_{j=1}^{m}{}_tp_x^{\prime(j)}=\exp[-\int_0^t\mu_{x+t}^{(\tau)}dt]$$

$${}_tq_x^{\prime(j)}=\int_0^t{}_tp_x^{\prime(j)}\cdot\mu_{x+t}^{(j)}dt=1-{}_tp_x^{\prime(j)}\qquad q_x^{\prime(j)}=\int_0^1{}_tp_x^{\prime(j)}\cdot\mu_{x+t}^{(j)}dt$$

$$\mu_{x+t}^{(j)}=\frac{-\frac{\partial}{\partial t}{}_tp_x^{\prime(j)}}{{}_tp_x^{\prime(j)}}=\frac{\frac{\partial}{\partial t}{}_tq_x^{\prime(j)}}{{}_tp_x^{\prime(j)}}=\frac{\frac{\partial}{\partial t}{}_tq_x^{(j)}}{{}_tp_x^{(\tau)}}$$

(1)至少存在一个 j，使得 $\int_0^\infty\mu_{x+t}^{(j)}dt=\infty$；

(2) $0\le{}_tp_x^{(\tau)}\le{}_tp_x^{\prime(j)}\le{}_tp_x^{(j)}\le1$， $0\le p_x^{(\tau)}\le p_x^{\prime(j)}\le p_x^{(j)}\le1$；

$0\le{}_tq_x^{(j)}\le{}_tq_x^{\prime(j)}\le{}_tq_x^{(\tau)}\le1$， $0\le q_x^{(j)}\le q_x^{\prime(j)}\le q_x^{(\tau)}\le1$。

4. **中心终止率**

原因 j 的中心终止率：$m_x^{(j)}=\dfrac{\int_0^1{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt}{\int_0^1{}_tp_x^{(\tau)}dt}=\dfrac{\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt}{\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)}dt}=\dfrac{q_x^{(j)}}{\int_0^1{}_tp_x^{(\tau)}dt}$

全中心终止率：$m_x^{(\tau)}=\sum_{j=1}^{m}m_x^{(j)}=\dfrac{\int_0^1{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)}dt}{\int_0^1{}_tp_x^{(\tau)}dt}=\dfrac{\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)}dt}{\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)}dt}=\dfrac{q_x^{(\tau)}}{\int_0^1{}_tp_x^{(\tau)}dt}$

伴随单风险模型的中心终止率：$m_x^{\prime(j)}=\dfrac{\int_0^1{}_tp_x^{\prime(j)}\mu_{x+t}^{(j)}dt}{\int_0^1{}_tp_x^{\prime(j)}dt}=\dfrac{q_x^{\prime(j)}}{\int_0^1{}_tp_x^{\prime(j)}dt}$

(1)若 $\mu_{x+t}^{(j)}=\mu_x^{(j)}$，则 $m_x^{(j)}=m_x^{\prime(j)}=\mu_x^{(j)}$；

(2)若 $\mu_{x+t}^{(j)}$ 是 t 的递增函数，则 $m_x^{\prime(j)}>m_x^{(j)}$；

若 $\mu_{x+t}^{(j)}$ 是 t 的递减函数，则 $m_x^{\prime(j)}<m_x^{(j)}$。

5. 在特殊假设条件下，终止概率与独立终止率的关系

(1) 常 值 终 止 力 假 设 ， 即 $\mu_{x+t}^{(j)}=\mu_x^{(j)}$ ， $\mu_{x+t}^{(\tau)}=\mu_x^{(\tau)}$ $(0\leqslant t\leqslant1)$， 则

$$\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}=\frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}}=\frac{\ln p_x^{\prime(j)}}{\ln p_x^{(\tau)}}，从而\ p_x^{\prime(j)}=[p_x^{(\tau)}]^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}。$$

(2)均匀分布假设，即 ${}_tq_x^{(j)}=t\cdot q_x^{(j)}$， ${}_tq_x^{(\tau)}=\sum_{j=1}^{m}{}_tq_x^{(j)}=t\cdot\sum_{j=1}^{m}q_x^{(j)}=t\cdot q_x^{(\tau)}$， 则

$${}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}=q_x^{(j)}，\ {}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)}=q_x^{(\tau)}；\ \frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}=\frac{\ln p_x^{\prime(j)}}{\ln p_x^{(\tau)}}，从而\ p_x^{\prime(j)}=[p_x^{(\tau)}]^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}}。$$

6. 趸缴纯保费

$$A_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(\tau)}=\sum_{j=1}^{m}A_x^{(j)}，其中\ A_x^{(j)}=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\cdot{}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(j)}；$$

$$\overline{A}_x=\int_0^{+\infty}v^t\cdot{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(\tau)}dt=\sum_{j=1}^{m}\overline{A}_x^{(j)}，其中\ \overline{A}_x^{(j)}=\int_0^{+\infty}v^t\cdot{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt\approx\frac{i}{\delta}A_x^{(j)}\ (\text{UDD})。$$

一般地，$\overline{A}_x=\sum_{j=1}^{m}\int_0^{+\infty}b_{x+t}^{(j)}v^t\cdot{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(j)}dt\approx\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}b_{x+k+\frac{1}{2}}^{(j)}v^{k+\frac{1}{2}}\cdot{}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(j)}$ (UDD 假设下运用中点公式)。

Piple学习资料

第八章 养老金计划的精算方法

1. 养老金计划中退休给付和相应缴费(捐纳金)的精算现值的计算

(1) 多元风险模型：$l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} p_x^{(\tau)} = [1-(q_x^{(d)}+q_x^{(w)}+q_x^{(r)}+q_x^{(i)})]$，其中 $q_x^{(d)},q_x^{(w)},q_x^{(r)},q_x^{(i)}$ 分别表示死亡、解约、年老退休和残废退休的概率；

(2)年薪比例函数：对于 x 岁加入养老金计划现年 $x+h$ 岁的员工，其在 $x+h$ 岁的实际年薪记为$(AS)_{x+h}$，在 $x+h+t$ 岁的预期年薪记为$(ES)_{x+h+t}$，则假设有一个年薪比例函数 S_y，使得 $(ES)_{x+h+t}=(AS)_{x+h}\cdot\dfrac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}$；

(3)投资回报率；

(4)年金精算现值因子：$x+t$ 岁时(正常)年老退休的年金精算现值因子记为 $\bar{a}_{x+t}^{r}$，残废退休的年金精算现值因子记为 $\bar{a}_{x+t}^{i}$。

2. 缴费(捐纳金)的精算现值

$$c(AS)_{x+h}\int_0^{\omega-x-h} v^t\cdot{}_tp_{x+h}^{(\tau)}\frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}dt$$

$$\approx c\frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}}\sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}}\cdot{}_{k+\frac{1}{2}}p_{x+h}^{(\tau)}S_{x+h+k}$$ (应用中点规则近似)

3. 年老退休给付

$R(x,h,t)$表示 x 岁加入计划现年 $x+h$ 岁的员工，将在 $x+h+t$ 岁获得立即或延期给付年金的年给付额。

现年 $x+h$ 岁的计划加入者过去的薪金总额记为$(TPS)_{x+h}$，相应的年给付额部分则为 $f(TPS)_{x+h}$。

年老退休给付的精算现值

$$APV=\int_{f-x-h}^{\omega-x-h} v^t\cdot{}_tp_{x+h}^{(\tau)}\mu_{x+h+t}^{(r)}R(x,h,t)\bar{a}_{x+h+t}^{r}dt$$

$$\approx\sum_{k=f-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}}\cdot{}_kp_{x+h}^{(\tau)}q_{x+h+k}^{(r)}R(x,h,k+\frac{1}{2})\bar{a}^{r}_{x+h+k+\frac{1}{2}}$$ (应用中点规则近似)，其中 f 表示最低退休年龄，ω 表示最高退休年龄。

4. 残废退休给付

(1)可能给付到一定年龄(如 65 岁)便转为年老退休给付；

(2)计划加入者必须工作 5 年以上并在 65 岁以下时残废才能获得这项年金。

$R(x,0,t)$表示给付额，若不能转成年老退休给付，则其精算现值为

$$\int_5^{65-x} v^t\cdot{}_tp_x^{(\tau)}\mu_{x+t}^{(i)}R(x,0,t)\bar{a}_{x+t}^{i}dt$$

$$\approx\sum_{k=5}^{64-x} v^{k+\frac{1}{2}}\cdot{}_kp_x^{(\tau)}q_{x+k}^{(i)}R(x,0,k+\frac{1}{2})\bar{a}^{i}_{x+k+\frac{1}{2}}$$ 。

5. 解约给付与缴费(捐纳金)的退还

$(ATPC)_{x+h}$ 表示现年 $x+h$ 岁的计划加入者已缴费(捐纳金)按过去各年利率计算的到计算期的积累值，并假设这个积累值以后以年利率 j 积累，则在 $x+h+t$ 岁解约时相应这部分缴费(捐纳金)的退还额为 $B(x,h,t)=(ATPC)_{x+h}(1+j)^t$，其精算现值为

$$(ATPC)_{x+h}\sum_{k=0}^{\beta-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}}\cdot{}_kp_{x+h}^{(\tau)}q_{x+h+k}^{(w)}(1+j)^{k+\frac{1}{2}}$$ (应用中点规则近似)，其中 β 是有资格获得立即或延期退休给付的年龄，$\beta>x+h$，并假设到达年龄 β 后不再有解约退还金。

计算期当年的缴费(捐纳金)设为年薪的 $c\%$，在当年解约时平均约退还一半，即 $\frac{1}{2}(0.01c)(AS)_{x+h}$，在此后第 $k+1$ 年解约时平均约退还$(0.01c)(AS)_{x+h}(1+j)^k$，于是这部分缴费(捐纳金)到解约时退还额的精算现值为

$$(0.01c)(AS)_{x+h}[\frac{1}{2}v^{\frac{1}{2}}q_{x+h}^{(w)}+\sum_{k=1}^{\beta-x-h-1}v^{k+\frac{1}{2}}\cdot{}_kp_{x+h}^{(\tau)}q_{x+h+k}^{(w)}(1+j)^k]$$ 。